Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 5. Tydzień rozpoczynający się 6. kwietnia

Zadania

1. Niech (X, Y) będzie zmienną losową o gęstości $f(x, y)$. Udowodnić, że $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.
2. X jest zmienną losową typu dyskretnego, tzn. dane są ciągi $\{x_i\}$, $\{p_i\}$ – wartości i ppb tej zmiennej. Udowodnić, że dla $Y = aX + b$ jest $\mathrm{V}(Y) = a^2\mathrm{V}(X)$, $(a, b \in \mathbb{R})$.
3. Zmienna losowa podlega standardowemu rozkładowi normalnemu, tzn. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. (Skrótowo: $X \sim N(0, 1)$). Znaleźć rozkład (gęstość $f_Y(y) \equiv g(y)$) zmiennej $Y = X^2$.
4. Wykazać, że $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. (Wsk.: W zadaniu 1.3 dokonać podstawienia $t = x^2/2$ i porównać z zadaniem 1.6)
5. Mówimy, że zmienna losowa X podlega rozkładowi Gamma z parametrami $b, p > 0$ jedynie wtedy gdy $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)}\, x^{p-1} \exp(-bx)$, dla $x \in (0, \infty)$. (Krótko: $X \sim \mathrm{Gamma}(b, p)$). Czy Y z zadania 3. ma rozkład Gamma? Jeżeli tak, podać wartości parametrów b, p.
6. Zmienna X ma standardowy rozkład normalny $X \sim N(0, 1)$. Niech $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \sigma X + \mu$.
7. **2p.** Zmienna (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = xy$, na obszarze $[0, 2] \times [0, 1]$. Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej, czyli obliczyć $F_{XY}(s, t) = \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} xy\, dy\, dx$.
8. **2p.** (X, Y) z poprzedniego zadania. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = X + Y$.
9. Zmienna (X, Y) jest typu ciągłego, zmienne X, Y są niezależne. Udowodnić, że $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Witold Karczewski